



Tatabányai Árpád Gimnázium

Helyi tanterv

HT4-2020 és HT6-2020

Négy és hat évfolyamos gimnázium

**Matematika
specializáció**

FRISSÍTVE: 2022. JÚLIUS 4.

Matematika

A 9. évfolyamtól kezdődően hangsúlyosabbá válik a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának fejlesztése. A spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások). A 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetetők. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. A bizonyítások, indoklások önálló felfedezése fejleszti a tanulók érvelési képességét, mérlegelő gondolkodását. Néhány tétel bizonyítása elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése.

Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alaphalmazának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzen műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. A tanulók megtapasztalják a matematika alkalmazhatóságát, hasznosságát.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni.

A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvényábrázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Az új fogalmak, magasabb szintű absztrakciót igénylő tudástartalmak bevezetésekor az egyéni adottságokhoz, ismeretekhez alkalmazkodó differenciálás biztosítja a megfelelő tempójú haladást annak a tanulónak, akinél ezek a lépések hosszabb időt, több szemléltetést igényelnek. Ezzel a lassabban haladó tanuló sem veszíti el érdeklődését a matematika iránt.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

A tanulás kompetenciái: A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

A kommunikációs kompetenciák: A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

A digitális kompetenciák: A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

A matematikai, gondolkodási kompetenciák: A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A

tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozik olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

A személyes és társas kapcsolati kompetenciák: A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulása során keresztül erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái: A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák: A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projekteken való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőkézség, másokkal való együttműködés készsége).

Matematika

11-12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismételésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznek feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

11. évfolyam emelt matematika

A tantárgy heti óraszám: 6 óra

A tantárgy éves óraszám: 204 óra

A témakörök áttekintő táblázata:

Témakör neve	Óraszám
Trigonometria	55
Számelméleti ismeretek, számhalmazok	12
Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus	48
Koordinátageometria	39
Sorozatok	33
Kombinatorika, gráfok	17
Összes óraszám:	204

Témakör: Trigonometria

Óraszám: 55 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- két vektor hajlásszögének meghatározása, skaláris szorzat használata
- ábrázolja, transzformálja és jellemzi a trigonometrikus függvényeket
- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt
- megold trigonometrikus egyenleteket és egyenlőtlenségeket

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- ismeri a forgásszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- ismeri a trigonometrikus függvények grafikonját és jellemzését
- ismeri a periodikusság fogalmát
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hegyesszög és forgásszögek szinusza, koszinusza, tangense, kotangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszi összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Trigonometrikus függvények ábrázolása, jellemzése, transzformációi
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A szinusztétel és koszinusztétel bizonyítása
- Számítások négyszögekben, sokszögekben, térben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása
- Szögfüggvények közötti összefüggések használata
- Addíciós tételek:
 - két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,
 - egy szög kétszeresének szögfüggvényei,
 - A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.
- Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.
- Háromszögre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.
- Trigonometrikus egyenletek
- Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése.
- Trigonometrikus egyenlőtlenségek
- Grafikus megoldás, vagy egységkör alkalmazása.
- Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.

Fogalmak

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel, függvények periodikussága,

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

Témakör: Számelméleti ismeretek, számhalmazok

Óraszám: 12 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- átváltás különböző alapú számrendszerek között, műveletek számrendszerben adott számokkal
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényező felbontásból
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártsága

Fogalmak

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímek

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás

- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

Témakör: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus

Óraszám: 48 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.
- ismeri és alkalmazza az n-edik gyök és a törtekitevőjű hatvány fogalmát

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
- permanencia elv
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- hatványfogalom kiterjesztése irracionális kitevőjű számra
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az n-edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- Az n-edik gyök azonosságainak ismerete, bizonyítása, alkalmazása
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- A logaritmus értelmezése
- Áttérés más alapú logaritmusra
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

- A logaritmus fogalma.
- Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.
- A logaritmus azonosságai.
- Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra.
- Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.
- A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.
- *Matematikatörténet*: Napier, Kepler; a logaritmus fogalmának kialakulása,
- A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.
- Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.
- Inverz függvénykapcsolat.
- Logaritmosos egyenletek, egyenlőtlenségek.
- Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek
- Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.
- Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmosos egyenleteknél.
- Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.

Fogalmak

n-edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus fogalma, logaritmusfüggvény, inverz függvény

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projekt munkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoport munkában
- GeoGebra program használata
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban
- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoport munkában

- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

Témakör: Koordinátageometria

Óraszám: 39 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- szakasz felezőpontjának, harmadolópontjának koordinátái
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Szakaszfelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens
- A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata
- Az egyenes egyenletei:
 - Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes egyenlete.
 - Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban.
 - Iránytényezős egyenlet.
- Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.
- Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata.
- A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.
- Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele.
- Két egyenes metszéspontja.
- Két egyenes hajlásszöge.

- Egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- Kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltétele, két egyenes metszéspontja
- Megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- Kör és egyenes kölcsönös helyzetének meghatározása, két kör közös pontjainak meghatározása
- Felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.
- A parabola tengelyponti egyenlete.
 - A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.
- A parabola és a másodfokú függvény.
- Teljes négyzetté kiegészítés.
- A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete.
- A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.

Fogalmak

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, irányvektor, normálvektor, iránytényező, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete, parabola egyenlete, érintő

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordinátageometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusán, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

Témakör: Sorozatok

Óraszám: 33 óra

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Sorozat megadása rekurzíóval – Fibonacci-sorozat. *Matematikatörténet*: Fibonacci
- Számtani sorozat fogalma, a számtani sorozat n -edik tagja.
- A számtani sorozat első n tagjának összege.

- Mértani sorozat fogalma, a mértani sorozat n -edik tagja.
- A mértani sorozat első n tagjának összege.
- *Matematikatörténet: Gauss.*
- Számítási feladatok számtani és mértani sorozatokra.
- Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal.
- A számtani sorozat mint lineáris, és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása.
- Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása.
- Törlesztési feladatok.
- Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjárdék.
- Sorozatok konvergenciája.
- A határérték szemléletes és pontos definíciói.
- Műveletek konvergens sorozatokkal.
- Konvergens és divergens sorozatok.
- Konvergens sorozatok tulajdonságai.
- Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek.
- Rendőrelv.
- Végtelen sorok.
- Végtelen sor konvergenciája, összege.
- Végtelen mértani sor.
- Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.

Fogalmak

Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat, sorozat határértéke, korlátossága, konvergens sorozat, divergens sorozat, végtelen sor,

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- **Matematikatörténeti kiselőadások készítése**
- **Pénzügyi számítások, hitelfelvétel, törlesztőrészlet számítások csoportmunkában**
- **Digitális alkalmazások használata**
- **Gondolattérkép készítése**

Témakör: Kombinatorika, gráfok

Óraszám: 17 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
- A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása, Pascal háromszög
- A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában
- Teljes gráf, összefüggő gráf, fagráf, út, vonal, kör fogalmának ismerete
- Euler vonal,
- Irányított gráf

Fogalmak

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban, teljes gráf, összefüggő gráf, fagráf, út, vonal, kör, Euler-vonal, irányított gráf

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése

12. évfolyam emelt matematika

A tantárgy heti óraszám: 8 óra

A tantárgy éves óraszám: 224 óra

A témakörök áttekintő táblázata:

Témakör neve	óraszám
Statisztika, valószínűség számítás	27
Függvények, differenciál számítás	43
Síkidomok területe, integrál számítás, téreometria	60
Rendszerező összefoglalás	94
Összes óraszám:	224

Témakör: Leíró statisztika és valószínűség számítás

Óraszám: 27 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
- Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középvértékekkel és szóródási mutatókkal
- Átlagos abszolút eltérés kiszámítása
- Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
- Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
- Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

Fogalmak

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás, középértékek

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
- Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
- A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
- Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
- Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

Valószínűség-számítás

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre
- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- feltételes valószínűség ismerete, kiszámítása
- várható érték kiszámítása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

Fogalmak

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmével dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fagráf segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyereség és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

Témakör: Függvények, differenciálszámítás

Óraszám: 43 óra

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése.
- Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.
- Függvény határértéke
- A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.
- Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.
- A függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.
- A függvények folytonossága.
- Példák folytonos és nem folytonos függvényekre.
- A folytonosság definíciói.
- Intervallumon folytonos függvények.
- Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.
- Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére.
- A függvénygörbe érintőjének iránytangense, érintő egyenletének felírása
- A differenciálhatóság fogalma.
- A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.
- Példák nem differenciálható függvényekre is.
- Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.
- Alapfüggvények deriváltja: konstans függvény, x^n , trigonometrikus függvények deriváltja.
- Műveletek differenciálható függvényekkel.

- Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltja.
- Magasabb rendű deriváltak.
- Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.
- A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.
- Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.
- Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.
- A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.
- Konvexitás vizsgálata deriválással.
- A konvexitás definíciója.
- Inflexiós pont.
- A második derivált és a konvexitás kapcsolata.
- Függvényvizsgálat differenciálszámítással.
- Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása.

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- GeoGebra program használatával függvények ábrázolása jellemzése
- Feladatmegoldás páros munkában vagy csoportmunkában
- Parabola szerkesztése
- Önálló feladatmegoldás

Fogalmak

függvény határértéke, folytonossága, differencia-, differenciálhányados, deriváltfüggvény, inflexiós pont, konvexitás

Témakör: Síkidomok területe, integrálszámítás, térgeometria

Óraszám: 60 óra

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A területszámítás alapelvei.
- Néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből.
- A területszámítás módszereinek áttekintése.
- Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben (pl. geometriai bizonyításokban).
- Síkidomok területének meghatározása
- Bevezető feladatok az integrál fogalmához.
- Függvény grafikonja alatti terület.
- Alsó és felső közelítő összegek.

- Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása.
- Közelítés véges összegekkel.
- A határozott integrál fogalma, jelölése.
- A szemléletes megközelítésre alapozva jutunk el a pontos definícióig.
- Példa nem integrálható függvényre is.
- Negatív függvény határozott integrálja.
- A határozott integrál és a terület-előjeles terület.
- Az integrál közelítő kiszámítása.
- Matematikatörténet: Bernhard Riemann.
- Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.
- Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.
- A határozott integrál tulajdonságai.
- Az integrál mint a felső határ függvénye.
- Integrálfüggvény.
- Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.
- Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.
- A primitív függvény fogalma.
- A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:
 - hatványfüggvény, polinom függvény;
 - trigonometrikus függvények.
- A Newton Leibniz tétel.
- Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.
- Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra.
- Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.
- Forgástest térfogatának meghatározása.
- Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata.
- A térfogatszámítás alapelvei.
- Néhány egyszerűbb test térfogatának levezetése az alapelvekből.
- A térfogatszámítás áttekintése.
- A térfogatszámítás néhány új eleme.
- A gúla, kúp térfogata.
- Csonka gúla, csonka kúp térfogata.
- Alakzatok felszíne, hálójára.
- Csonka gúla, csonka kúp felszíne.
- Gömb felszíne
- Térgeometria elemei.
- Szabályos testek.

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- GeoGebra program használata

- Testek hálójának elkészítése
- Testek készítése kartonpapírból
- Térgeometriai modellek, élvázak használata
- Kahoot program használata ellenőrzéshez
- Feladatok megoldása páros és csoportmunkában

Fogalmak

Alsó és felső közelítő összeg, határozott integrál, primitív függvény, határozatlan integrál, felszín, térfogat, forgástest, csonkagúla, csonkakúp, gömb

Témakör: Rendszerező összefoglalás

Óraszám: 94 óra

Gondolkodási módszerek:

Halmazok, matematikai logika:

- Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz.
- Halmazok közötti műveletek.
- Végtelen halmazok elmélete; számosságok.
- Állítások, logikai értékük.
- Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia.

Kombinatorika, gráfok, algoritmusok:

- Permutáció, variáció, kombináció.
- Binomiális tétel. Pascal háromszög.
- Elemi gráfelméleti ismeretek.
- A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása

Algebra és számelmélet:

Műveletek kifejezésekkel

- Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok.
- A hatványozás azonosságai.
- A matematikai fogalmak fejlődése, permanencia-elv.
- Gyökös kifejezések átalakításai.
- Exponenciális és logaritmusos kifejezések átalakításai.

Számelmélet

- Oszthatósági szabályok.
- Prímszámok.
- Oszthatósági feladatok megoldása.

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

- Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.
- Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.
- Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek.

- Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.
- Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.
- Polinomok algebrája.
- Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek.

Függvények, sorozatok, az analízis elemei

- Függvények
- A függvény fogalma.
- Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolútérték, exponenciális, logaritmus-, trigonometrikus függvények.
- Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint.
- Függvénytranszformációk.

Sorozatok, sorok

- A sorozat fogalma.
- Számtani, mértani sorozat.
- Rekurzióval megadott egyéb sorozatok.
- Sorozatok monotonitása, konvergenciája.
- A végtelen mértani sor.

Analízis

- Függvények korlátossága és monotonitása.
- Függvény határértéke, folytonossága.
- Differenciálhányados, derivált függvény.
- Differenciálási szabályok.
- Függvényvizsgálat differenciálás segítségével.
- Szélsőérték-meghatározási módok.
- A tanult függvények primitív függvényei.
- Integrálási módszerek.
- A határozott integrál.
- Newton Leibniz tétel.
- A határozott integrál alkalmazásai.

Geometria

- Geometriai alapfogalmak
- Tételek köcsönös helyzete, távolsága, szöge.
- Geometriai alakzatok, bizonyítások
- Nevezetes ponthalmazok.
- Síkidomok, testek, tulajdonságaik.
- Elemi sík- és térgeometriai tételek.
- Geometriai transzformációk
- Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik.

Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria

- *Vektor fogalma, műveletek a vektorok körében.*
- *Vektorfelbontás, vektorok koordinátái.*
- *Hegyszög szögfüggvényei. Szinusz- és koszinusztétel.*
- *A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása.*
- *Trigonometrikus azonosságok.*
- *Az egyenes egyenletei, egyenletrendszere (síkban és térben). A kör egyenletei.*
- *A parabola definíciója, egyenlete.*
- *Geometriai mértékek*
- *A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik.*

A terület fogalma és kiszámítási módjai.

- *A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai.*
- *Az integrálszámítás felhasználása alakzatok mértékének kiszámításához.*

Valószínűségszámítás, statisztika

- *Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás, kvartilis.*
- *Eseményalgebra és műveleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer.*
- *Grafikonok, táblázatok, diagrammok készítése és olvasása.*
- *Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság.*
- *A valószínűség kiszámítási módjai.*
- *Geometriai valószínűség.*
- *Feltételes valószínűség.*
- *Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján.*