

# MATEMATIKA

## EMELT

9-12. évfolyam

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról mint tudásrendszerrel és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységgel. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre. A matematikai gondolkodás fejlesztése segíti a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését.

A matematikatanítás feladata a matematika különböző arculatainak bemutatása. A matematika: kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömeinek forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítje; önálló tudomány; más tudományok segítje; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze.

A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytan, statisztikai stb.) és leírásokat. A matematikai nevelés sokoldalúan fejleszti a tanulók modellalkotó tevékenységét. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reprodukív és a problémamegoldó, valamint az alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), mint a leírások (pl. aritmetikai, algebrai mint a leírások, transzformációk) automatizált végzése sem. A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét.

A tanulási folyamat során fokozatosan megismertetjük a tanulókkal a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása). Mindezzel fejlesztjük a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességét. Az új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, az önálló gondolatok megfogalmazását, a felmerült problémák megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. A diszkussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a többféle nézőpont érvényesítését, a komplex problémakezelés képességét is fejleszti. A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére.

A matematika területén a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések értelmezése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően. Ez a felépítés egyaránt lehetővé teszi a lassabban haladókkal való foglalkozást és a tehetség kibontakoztatását.

A matematikai értékek megismerésével és a matematikai tudás birtokában a tanulók hatékonyan tudják használni a megszerzett kompetenciákat az élet különböző területein. A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán és más területek, illetve a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. Ezért a tanulóknak rendelkezniük kell azzal a képességgel és készséggel, hogy

alkalmazni tudják matematikai tudásukat, és felismerjék, hogy a megismert fogalmakat és tételeket változatos területeken használhatjuk. Az adatok, táblázatok, grafikonok értelmezésének megismerése nagyban segíthet a mindennapokban, és különösen a média közleményeiben való reális tájékozódásban. Mindehhez elengedhetetlen egyszer matematikai szövegek értelmezése, elemzése. A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt.

A tanulók rendszeresen oldjanak meg önállóan feladatokat, aktívan vegyenek részt a tanítási, tanulási folyamatban. A feladatmegoldáson keresztül a tanulók képessé válhatnak a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára. Kialakul bennük az önellenrzés igénye, a sajátjukétól eltér szemlélet tisztelete. Mindezek érdekében is a tanítás folyamatában törekedni kell a tanulók pozitív motiváltságának biztosítására, önállóságuk fejlesztésére. A matematikatanítás, -tanulás folyamatában egyre nagyobb szerepet kaphat az önálló ismeretszerzés képességnek fejlesztése, az ajánlott, illetve az önállóan megkeresett, nyomtatott és internetes szakirodalom által. A matematika a lehet ségekhez igazodva támogatni tudja az elektronikus eszközök (zsebszámológép, számítógép, grafikus kalkulátor), internet, oktatóprogramok stb. célszerű felhasználását, ezzel hozzájárul a digitális kompetencia fejlődéséhez.

A tananyag egyes részleteinek csoportmunkában történő feldolgozása, a feladatmegoldások megbeszélése az együttműködési képesség, a kommunikációs képesség fejlesztésének, a reális önértékelés kialakulásának fontos területei. Ugyancsak nagy gondot kell fordítani a kommunikáció fejlesztésére (szövegértésre, mások szóban és írásban közölt gondolatainak meghallgatására, megértésére, saját gondolatok közlésére), az érveken alapuló vitakészség fejlesztésére. A matematikai szöveg értő olvasása, tankönyvek, lexikonok használata, szövegekben a lényeg kiemelése, a helyes jegyzeteléshez szoktatás a felsőfokú tanulást is segíti.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen elnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jártas a problémamegoldásban. A matematikatanítás alapvető feladata a pénzügyi-gazdasági kompetenciák kialakítása. Életkortól függően rendszeresen foglalkozunk olyan feladatokkal, amelyekben valamilyen probléma legjobb megoldását keressük. Szánjunk kiemelt szerepet azoknak az optimum-problémáknak, amelyek gazdasági kérdésekkel foglalkoznak, amikor költség, kiadás minimumát; elérhető eredmény, bevétel maximumát keressük. Fokozatosan vezessük be matematikafeladatainkban a pénzügyi fogalmakat: bevétel, kiadás, haszon, kölcsön, kamat, értékcsökkenés, -növekedés, törlesztés, futamidő stb. Ezek a feladatok erősítik a tanulóknál azt a tudatot, hogy matematikából valóban hasznos ismereteket tanulnak, illetve, hogy a matematika alkalmazása a mindennapi élet szerves része. Az életkor előrehaladtával egyre több példát mutassunk arra, hogy milyen területeken tud segíteni a matematika. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy milyen matematikai ismereteket alkalmaznak az alapvetően matematikaiigényes, illetve a matematikát csak kisebb részben használó szakmák (pl. informatikus, mérnök, közgazdász, pénzügyi szakember, biztosítási szakember, valamint pl. vegyész, grafikus, szociológus), ezzel is segítve a tanulók pályaválasztását.

A matematikához való pozitív hozzáállást nagyban segíthetik a matematika tartalmú játékok és a matematikához kapcsolódó érdekes problémák és feladványok.

A matematika a kultúrtörténetnek is része. Segítheti a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk a tananyag egyes elemeinek a múlt századokban való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetése, a máig meg nem oldott, egyszerre sok területen matematikai sejtések megfogalmazása, nagy matematikusok életének, munkásságának megismerése.

Minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nemcsak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Sokszor az alkalmazhatóság vezérli a tananyag és a tárgyalásmód megválasztását, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás

szükséges. Egy adott osztály matematikatanítása során a célok, feladatok teljesíthet sége igényli, hogy a tananyag megválasztásában a tanulói érdekl és a pályaaorientáció is szerepet kapjon. A matematikát alkalmazó pályák felé vonzódnó tanulók gondolkodtató, kreativitást igényl versenyfeladatokkal motiválhatók, a humán területen továbbtanulni szándékozók számára érdekesebb a matematika kultúrtörténeti szerepének kidomborítása, másoknak a középiskolai matematika gyakorlati alkalmazhatósága fontos. A fokozott szaktanári figyelem, az iskolai könyvtár és az elektronikus eszközök használatának lehet sége segíthetik az esélyegyenl ség megvalósulását.

Els dleges célunk, hogy a tanulók szemléletét, gondolkodásmódját fejlesszük. Azt a lehet séget, hogy ezt a tantervet matematika iránt érdekl d tanulók választják, és azt, hogy itt az alapnál több óra áll rendelkezésre a matematika elsajátítására, olyan új ismereteket építettünk be, amelyek a szemléletfejlesztéshez, az összefüggések könnyebb felismeréséhez, a tantárgy megszerettetéséhez szükségesek. Mindez nem azt jelenti, hogy az eredményesség növelése másodrangú cél lenne. S t, így maradt id nk hatékonyabb, de id igényes módszerek (pl. önálló felfedeztetés, differenciált feladatok) alkalmazására, egy-egy felmerül probléma részletesebb elemzésére. A tapasztalatok alapján a fenti célú mérsékelt tananyag-növekedés az elért szemléletfejl déssel és a megnövekedett gyakorlási id kkel jelent s teljesítményjavulást eredményez.

## 9–10. évfolyam

A matematika tantervnek ez a fejezete a négyosztályos gimnáziumok azon tanulóinak szól, akik matematikából emelt szint képzést választottak. Ezért a tananyag összeállításánál feltételezhetjük, hogy az átlagosnál jobb képesség , érdekl d bb tanulóknak szól. Ebben a szakaszban már a normál osztályokéhoz képest több kiegészít elem kerül a tananyagba. Egyrészt olyanok, amelyek a motivációt növelhetik (pl. matematikatörténeti vonatkozások, játékok). Ha ezek a témakörök nem is nyújtanak közvetlen segítséget a versenyeken, érettségin, vagy majd a fels fokú oktatásban való eredményesebb szerepléshez, mégis, ezeket jobb és kevésbé er s csoportokban egyaránt érdemes komolyan venni, rendszeresen beiktatni, mert a tantárgyhoz való hozzáállásban bekövetkez pozitív változás miatt a ráfordított id b ven megtérül.

Másrészt olyan tananyagelemeket is szerepeltetünk, amelyek magabiztosabbá teszik a tanulók ismereteit, kitekintést nyújtanak egy-egy témakör szélesebb kör alkalmazásaira, segíthetik a versenyeken való eredményesebb szereplést. Ezeket az ismereteket az osztály vagy csoport szintjének megfelelő mélységben tárgyaljuk. A kevésbé er s csoportokban sem javasoljuk ezek elhagyását, mert a szemléletfejlesztéshez fontosak. Ezeknél a kerettanterv általában szemléletes, bizonyítás nélküli tárgyalást javasol. Az er sebb csoportokban tárgyalhatjuk ezeket részletesebben, több feladattal.

Ebben a korosztályban már természetes elvárás a pontos definíciók megadása, az állítások igazolása. De nemcsak tételekkel, feladatokkal lehet a problémamegoldó képességet fejleszteni. Hasznosak lehetnek ebb l a szempontból a matematikai alapú játékok is. A gyerekek szívesen játszanak maradékos osztáson, oszthatósági szabályokon alapuló számjátékokat, és szimmetriákon alapuló geometriai, rajzos játékokat. Nyerni akarnak, ezért természetes módon elemezni kezdik a szabályokat, lehet ségeket. Olyan következtetésekre jutnak, olyan elemzéseket végeznek, amelyeneket hagyományos feladatokkal nem tudnánk elérni. A geometria egyes területeinek (szimmetriák, aranymetszés) a m vézetekben való alkalmazásait bemutatva világossá tehetjük a tanulók el tt, hogy a matematika a kultúra elválaszthatatlan része. A témakör egyes elemeihez kapcsolódva mutassuk be néhány

matematikus életútját. Az ezekre a témákra fordított időben megterüli az ennek következtében növekvő érdeklődés, javuló motiváció miatt.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen elnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jól tud problémákat megoldani. Gazdasági, sport témájú feladatokkal, számos geometriai és algebrai szélsőérték-feladattal lehet gyakorlati kérdésekre optimális megoldásokat keresni.

Ez az életkor már alkalmassá teszi a tanulókat az önálló ismeretszerzésre. Legyen követelmény, hogy egyes adatoknak, fogalmaknak, ismereteknek könyvtárban, interneten nézzenek utána. Ez a kutatómunka hozzájárulhat a tanulók digitális kompetenciájának fejlesztéséhez, ugyanezt szolgálhatja a geometriai és egyéb matematikai programok használata is.

Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák.

# 9. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	13 óra
2. Számтан, algebra	62 óra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	22 óra
4. Geometria	57 óra
5. Valószínűség, statisztika	8 óra
Összefoglalásra, gyakorlásra, ismétlésre szánt órakeret (a kerettantervben ún. szabad órakeret, az éves óraszám 10%-a)	10 óra
Ellenőrzés, számonkérés	8 óra
Az éves óraszám	180 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok	Órakeret 13 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazm. veletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A halmaz fogalmának mélyítése, alkalmazása problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Halmazok. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek: üres halmaz, részhalmaz, halmazok egyenlősége. Halmazm. veletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementerhalmaz. Descartes-féle szorzat. A fogalmak ismétlése, alkalmazása több halmazra. Pontos definíciók, jelölések használata. Halmazok felbontása diszjunkt halmazok uniójára. A halmazm. veletek tulajdonságai. Összevetés a logikai m. veletek tulajdonságaival. Halmazok számossága. <math>n</math> elemű halmaz részhalmazainak a száma. Véges és végtelen halmazok.</p>		<p><i>Informatika:</i> Könyvtárszerkezet a számítógépen. Adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok sz. rése különböző szempontok szerint.</p> <p><i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok, szavak, hangok rendszerezése.</p>

<i>Matematikatörténet: Georg Cantor.</i>		<i>Biológia-egészségtan: rendszertan.</i>
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer halmaz. Permutáció, variáció, kombináció.	

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Számelmélet, algebra Valós számok</b>	<b>Órakeret 10 óra</b>
<b>Elzáró tudás</b>	Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. M-veletek elvégzése a racionális számok halmazán fejből, írásban, számológéppel. M-veletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A számfogalom fejlesztése: számkörbővítés elvei; a valós számok halmazának ismerete. Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Számhalmazok:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– természetes számok,</li> <li>– egész számok,</li> <li>– racionális számok,</li> <li>– irracionális számok,</li> <li>– valós számok.</li> </ul> <p>Mely m-veletek nem vezetnek ki az egyes számhalmazokból? A racionális számok halmazán végzett m-veletek biztonságos elvégzése – ismétlés, gyakorlás. M-veleti tulajdonságok alkalmazása: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás.</p> <p>Számok tizedes tört alakja. Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtek.</p> <p>Számok normálalakja. Számolás normálalakban felírt számokkal. Normálalak a számológépen.</p> <p>A valós számok és a számegyenes kapcsolata. A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére.</p>		<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz: a tér, az idő, az anyagmennyiség nagy és kis méreteinek megadása normálalakokkal.</i></p>
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Valós szám, normálalak	

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Számelmélet, algebra Algebrai kifejezések használata</b>	<b>Órakeret 15 óra</b>
<b>Elzáró tudás</b>	Összefüggések leírása algebrai kifejezésekkel, $(a \pm b)^2$ , $a^2 - b^2$ , helyettesítési érték, zárójelfelbontás.	

<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Algebrai kifejezések biztonságos használata, célszerű átalakítási módok megtalálása, elvégzése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
Algebrai kifejezések. Egész kifejezések, polinomok, törtkifejezések. Racionális és nem racionális kifejezések.		<i>Fizika; kémia:</i> mennyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése.
Nevezetes azonosságok: $(a \pm b)^2$ , $(a \pm b)^3$ , $(a + b + c)^2$ , $a^2 - b^2$ , $a^3 - b^3$ , $a^3 + b^3$ . Utalás $(a + b)^n$ kiszámolásra Pascal-háromszög segítségével. Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.		
Azonos átalakítások. Polinomok összeadása, kivonása. Polinomok szorzása, hatványozása. Szorzattá alakítás különböző módszerei. Polinom osztása polinommal. Algebrai törtekkel végzett műveletek. Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse. <i>Matematikatörténet:</i> algebra		
Számítási, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőség. Algebrai bizonyítás két változóra.		
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Algebrai kifejezés, polinom, algebrai tört, azonosság.	

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Számelmélet, algebra</b>	<b>Órakeret</b>
<b>Előzetes tudás</b>	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	<b>15 óra</b>
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A korábbi években szerzett ismeretek elmélyítése, bővítése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>

<p>Osztó, többszörös, oszthatóság, oszthatósági szabályok. Az oszthatósági szabályok rendszerezése. Analogiák nem tízes alapú számrendszerek oszthatósági szabályaiban. Példák egyéb számokkal (pl. 7-tel) való oszthatóságra tízes számrendszerben. Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban. Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.</p>	
<p>Prímszám, összetett szám, prímtényező s felbontás. A számelmélet alaptétele. Végtelen sok prímszám van. Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről. Osztók számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényező s felbontásból. Kis Fermat-tétel. Néhány speciális prím Nagy prímekek szerepe a titkosításban. <i>Matematikatörténet:</i> Euklidesz, Eratóstenész, Euler, Fermat.</p>	
<p>Diofantoszi egyenletek. Lineáris diofantoszi egyenlet. Az <math>ax + by + cxy = d</math> típusú diofantoszi egyenlet. Szöveges feladatok megoldása diofantoszi egyenlettel. <i>Matematikatörténet:</i> Diophantos.</p>	
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Osztó, többszörös, prím, prímtényező s felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Egyenlet, egyenletrendszer	Órakeret 22 óra
Elzárts tudás	Egyismeretlenes, első fokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontosságának felismertetése. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Divergens gondolkodás fejlesztése esetszétválasztások során. Számológép használata.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Első fokú egyenletek. Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz. Ekvivalens átalakítások. Első fokú paraméteres egyenletek. Egyenletek grafikus megoldása.</p>		<i>Fizika; kémia:</i> képletek értelmezése, egyenletek rendezése.
Első fokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok.		<i>Fizika:</i> kinematika,



A korábban tanult módszerek elmélyítése. További módszerek szöveges feladatok megoldására. Példák egyenlet nélküli megoldási módszerekre.	dinamika.  <i>Kémia:</i> oldatok összetétele.
Törtes egyenletek, egyenl tlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök. Mikor lesz egy tört értéke nulla, pozitív, negatív?	
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Abszolút értéket tartalmazó egyenl tlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.	<i>Fizika:</i> a mérés hibája.
Els fokú egyenletrendszerek. Egyenletrendszerek grafikus megoldása. Behelyettesít módszer. Egyenl együtthatók módszere. Új ismeretlen bevezetése. Els fokú paraméteres egyenletrendszerek. Egyenletrendszerral megoldható szöveges feladatok. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.	<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Els fokú egyenl tlenségek. Egyenl tlenségek grafikus megoldása. Egyismeretlenes egyenl tlenségrendszer.	
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Els fokú egyenlet, egyenl tlenség, értelmezési tartomány, azonosság. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Egyenletrendszer. Paraméteres egyenlet.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények	Órakeret 22 óra
<b>El zetes tudás</b>	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris függvények, fordított arányosság függvénye.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvény-modell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
Függvény fogalma. Rendszerez ismétlés. Értelmezési tartomány, értékkészlet. A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése: zérushely, monotonitás, széls érték, paritás. Kapcsolat: logika elemei – bármely, van olyan, negáció. Hétköznapi állítások tagadása.		<i>Informatika:</i> függvényábrázolás, grafikonkészítés számítógépes program segítségével.

Lineáris függvények. Rendszerez ismétlés. Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapokban.	<i>Fizika; kémia:</i> egyenesen arányos, lineárisan összefügg mennyiségek.
Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés. Hatványfüggvények. Negatív egész kitev $j$ hatványfüggvények. Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Egészrész-, törtrész-, el jelfüggvény, Dirichlet-féle függvény. Függvények inverze. Gyökfüggvények.	<i>Fizika:</i> négyzetesen arányos mennyiségek.
Fordított arányosság, els fokú törtfüggvény.	<i>Fizika; kémia:</i> fordítottan arányos mennyiségek.
Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $ f(x) $ ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.	
Rekurzív sorozatok. A Fibonacci-sorozat. Kapcsolat: aranymetszés. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.	<i>Biológia-egészségtan:</i> szimmetriák és nevezetes arányok megjelenése az él lényeknél.  <i>M vészetek:</i> szimmetriák és nevezetes arányok megjelenése az építészetben, festészetben, zenében.
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, széls érték, paritás. Függvény grafikonja, függvénytranszformáció.

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Geometria Alapfogalmak, pont-halmazok, egybevágósági transzformációk</b>	<b>Órakeret 57 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Tételek kölcsönös helyzete, távolsága. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Speciális háromszögek, négyszögek elnevezése, felismerése, tulajdonságaik. Háromszögek szerkesztése alapadatokból.	

	Háromszög köré írt kör és beírt kör szerkesztése. A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel ismerete. Geometriai transzformációk, a szimmetria felismerése a környezetünkben, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. A szükséges és az elégséges feltétel felismerése. Összetett számítási probléma lebontása, számítási terv készítése (megfelel részlet kiválasztása, a részletszámítások logikus sorrendbe illesztése). A geometriai transzformációk átfogó ismerete, alkalmazása problémamegoldásban. A szimmetria szerepének felismertetése a matematikában, a művészetekben. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>	
	<b>Kapcsolódási pontok</b>
Geometriai alapfogalmak Tételek kölcsönös helyzete, távolsága, szöge. Sokszögek szögösszege, átlók száma. A szög ívmértéke. A radián mint mértékegység. Átváltás fok és radián között.	<i>Fizika:</i> szögsebesség, szöggyorsulás.
Nevezetes ponthalmazok rendszerezése: – adott térelemtől $l$ adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. – két térelemtől $l_1$ egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. Parabola. Egyenlőtávolsággal meghatározott ponthalmazok. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek. <i>Matematikatörténet:</i> Descartes. Két, vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése. Háromszög beírt, körülírt, hozzáírt körei. Háromszög további nevezetes vonalai. (Bizonyítással.) Középvonalak. (Négyszögek középvonalai is.) Magasságok – magasságpont. Súlyvonalak – súlypont. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és fordítva.	<i>Fizika:</i> parabolatükör.  <i>Informatika:</i> geometriai szerkesztési program használata.
Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása. Számítási feladatok síkban és térben. Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban. Mikor hegyesszög, illetve tompaszög a háromszög? Két pont távolsága koordináta-rendszerben. <i>Matematikatörténet:</i> Pitagorasz.	<i>Fizika:</i> vektor felbontása merleges összetevőkre.
Thalész tétele és a tétel megfordítása. Szerkesztési és bizonyítási feladatok. Körérintés szerkesztése, érintő négyszög. <i>Matematikatörténet:</i> Thalész.	

<p>Geometriai transzformáció fogalma. Egybevágósági transzformációk rendszere ismétlése. Tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, identitás. A geometriai transzformációk tulajdonságai: – fixpont, fix egyenes, fix sík, – szögtartás, távolságtartás, irányítástartás. Szimmetrikus alakzatok, szimmetrián alapuló játékok. Geometriai transzformációk szorzata.</p>	<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkeszt program használata.</p>
<p>Geometriai széls érték-feladatok. Háromszögbe írt minimális terület háromszög. Izgonális pont.</p>	<p><i>Földrajz:</i> minimális utak meghatározása.</p>
<p>Az egybevágóság fogalma. Alakzatok egybevágósága. A háromszögek egybevágóságának alapesetei.</p>	
<p>M vektorok vektorokkal: összeadás, kivonás, számmal való szorzás. Vektorfelbontás tétele. Vektor koordinátái. Analógia a számhalmazokon végzett műveletekkel.</p>	<p><i>Fizika:</i> vektormennyiségek - er , sebesség, gyorsulás, térsűrűség.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Tételelem, sokszög, egybevágósági transzformáció. Vektor, középponti szög. Érintő négyzet.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Statisztika. valószínűség	Órakeret 8 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Adatok elemzése, átlag, táblázatok, grafikonok használata, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség egyszeri fogalma. Százalékszámítás.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Ismeretek rendszerezése. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, a kísérletek kiértékelése, következtetések. Adatok rendezése, rendszerezése: diagram készítése, olvasása; táblázat értelmezése, készítése. Számítógép használata az adatok rendezésében, értékelésében, ábrázolásában. A valószínűség fogalmának mélyítése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Statisztikai adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása. Adatok rendezése, osztályokba sorolása, táblázatba rendezése, ábrázolása. Adathalmazok jellemzői: terjedeleme, átlag, medián, módusz, szórás.</p>		<p><i>Földrajz:</i> időjárás, éghajlati és gazdasági statisztikák.  <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> történelmi, társadalmi témák vizuális ábrázolása (táblázat, diagram).</p>

		<i>Informatika:</i> adatkezelés, adatfeldolgozás, információ- megjelenítés.
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás	

<b>A fejlesztés várt eredményei a 9. évfolyam végén</b>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Halmazm veletek alkalmazása számhalmazokra, ponthalmazokra.</li> <li>– Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése.</li> <li>– Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita alkalmazása feladatmegoldás során.</li> <li>– Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére.</li> </ul>
	<p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása.</li> <li>– Számok normálalakja, normálalakkal végzett m veletek alkalmazása.</li> <li>– Oszthatóság, a számelmélet alaptétele, alkalmazása.</li> <li>– Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ismerete, alkalmazása.</li> <li>– Algebrai kifejezésekkel végzett m veletek, azonosságok alkalmazása.</li> <li>– Els fokú egyenletek, egyenl tlenések, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.</li> <li>– A számológép használata.</li> </ul>
	<p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Térelemek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése.</li> <li>– Nevezetes ponthalmazok rendszerezése, alkalmazása.</li> <li>– A kör és részeinek ismerete.</li> <li>– Egybevágósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a m vézetekben való alkalmazás ismerete.</li> <li>– Egybevágó alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.</li> <li>– Vektor fogalmának, vektorm veleteknek az ismerete. Vektorfelbontás adott bázisrendszerben.</li> <li>– Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban.</li> <li>– A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása.</li> </ul>

*Függvények, sorozatok*

- A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete
- A négyzetgyökfüggvény ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

*Valószínűség, statisztika*

- Statisztikai adatok elemzése: adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése; adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának meghatározása.

# 10. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	20 óra
2. Számтан, algebra	63 óra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	8 óra
4. Geometria	55 óra
5. Valószínűség, statisztika	16 óra
Összefoglalásra, gyakorlásra, ismétlésre szánt órakeret (a kerettantervben ún. szabad órakeret, az éves óraszám 10%-a)	10 óra
Ellenőrzés, számonkérés	8 óra
Az össz. óraszám	180 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok	Órakeret 20 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazm. veletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A halmaz fogalmának mélyítése, alkalmazása problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok készítése. Adott tulajdonságú halmazok konstruálása. Ábrák színezése, lefedése adott feltételek szerint. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre.		
Logika. Logikai m. veletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Rendszerez ismétlés feladatokon keresztül. A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése.		

<p>Logikai és halmazelméleti m veletek kapcsolata.  <i>Matematikatörténet:</i>Pólya György, George Boole.</p>	
<p>Kombinatorika.  Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.  Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.  Kombináció – ismétlés nélkül.  Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétélünk, mélyítjük a feladatmegoldási rutinunkat.  Jelek használata: <math>n!</math>, <math>\binom{n}{k}</math>.  Binomiális együtthatók, egyszer tulajdonságaik.  Pascal háromszög.  <i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal, Erdős Pál.  Néhány kombinatorikus geometriai feladat.  <math>n</math> pontot maximum hány egyenest határoz meg?  <math>n</math> egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet?  <math>n</math> egyenes maximum hány részre osztja a síkot?  Gráfok.  Néhány probléma ábrázolása gráfokkal.</p>	
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer halmaz. Logikai m veletek, kapcsolatok a halmazm veletekkel. Permutáció, variáció, kombináció.</p>

<p>Tematikai egység/  Fejlesztési cél</p>	<p>Számelmélet, algebra  Valós számok</p>	<p>Órakeret  23óra</p>
<p><b>El zetes tudás</b></p>	<p>Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. M veletek elvégzése a racionális számok halmazán fejből, írásban, számológéppel. M veletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás. A négyzetgyök fogalma.</p>	
<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>A számfogalom fejlesztése: számkörb vítés elvei; a valós számok halmazának ismerete. Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.</p>	
<p><b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b></p>		<p><b>Kapcsolódási pontok</b></p>
<p>Négyzetgyök.  A négyzetgyökvonás azonosságai.  <math>\sqrt{n}</math> irracionális, ha <math>n</math> nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás.  Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól.  Nevez gyöktelenítése.</p>		
<p>Az <math>n</math>-edik gyök fogalma.  A gyökvonás azonosságai.  Páros és páratlan gyökkitev .  Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól.  A szerkeszthet ség néhány kérdése.  A tört kitev j hatvány. Permanencia-elv.</p>		



<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Valós szám, négyzetgyök, $n$ -edik gyök.
------------------------------------	--

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Számelmélet, algebra Egyenlet, egyenl tlenség, egyenletrendszer</b>	<b>Órakeret 40 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Egyismeretlenes, els fokú egyenletek, egyenl tlenségek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellen rzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellen rzés fontosságának felismertetése. A problémához ill számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelő en. Divergens gondolkodás fejlesztése esetszétválasztások során. Számológép használata.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata.</p> <p>Széls érték-feladatok másodfokú függvény vizsgálatával. Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenl tlenség felhasználásával történ megoldás. Optimális megoldásokra törekvés.</p> <p>Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással.</p> <p>A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségi szint alkalmazása. Számológép használata.</p> <p>A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Diskusszió. Önellen rzés képességének fejlesztése.</p> <p>Gyöktényez s alak, Viète-formulák.</p> <p>Másodfokúra visszavezethet egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.</p>		<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú minimum- és maximum-problémák.</p> <p><i>Filozófia:</i> egy adott rendszeren belül megoldhatatlan problémák létezése.</p>
<p>Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. Modellalkotás, megoldási módszerek.</p>		<p><i>Fizika:</i> egyenletesen gyorsuló mozgás leírása.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes program</p>

	használata.
Másodfokú egyenlettelenségek. A megoldás megadása másodfokú függvény vizsgálatával. Többféle megoldási módszer összevetése.	
Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Emlékezés korábban megismert módszerekre, alkalmazás az adott környezetben.	<i>Fizika:</i> ütközések.
Gyökös egyenletek. Ekvivalens és nem ekvivalens egyenletmegoldási lépések. Hamisgyök, gyökvesztés. Önellentmondás.	
Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetsztékválasztások.	
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet, egyenlettelenség, megoldóképlet, diszkrimináns. Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények	Órakeret 8 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris függvények, fordított arányosság függvénye.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvény-modell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
Másodfokú függvények Gyökfüggvények		<i>Fizika:</i> négyzetesen arányos mennyiségek.
Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.		
<i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.		<i>Biológia-egészségtan:</i> szimmetriák és nevezetes arányok megjelenése az élő lényeknél.

	<i>M vészetek:</i> szimmetriák és nevezetes arányok megjelenése az építészetben, festészetben, zenében.
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, széls érték, paritás. Függvény grafikonja, függvénytranszformáció.

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Hegyesszögek szögfüggvényei</b>	<b>Órakeret 15 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Hasonlóság alkalmazása számolási feladatokban. Pitagorasz-tétel.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Síkbeli és térbeli ábra készítése a valós geometriai problémáról. Számítási feladatok, a megoldáshoz alkalmas szögfüggvény megtalálása. Számológép, számítógép használata.	
	<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>	<b>Kapcsolódási pontok</b>
	Távolságok, magasságok meghatározása arányokkal. A valóság kicsinyített ábrájáról szögek és szakaszok meghatározása méréssel és számolással. A hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója. Szögfüggvény értékének meghatározása számológéppel. Számítási feladatok szögfüggvények használatával síkban és térben.	<i>Fizika:</i> Lejt n mozgó testre ható er k kiszámítása. Rezg mozgás és körmozgás kapcsolata.
	Pótszögek szögfüggvényei. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között. Egyszer trigonometrikus összefüggések bizonyítása. Nevezetes szögek szögfüggvényei: 30°; 60°; 45°, az értékek megjegyzése. 18°, 36°, 54°, 72° szögfüggvényeinek kiszámítása az „aranyháromszögb l”. Hegyesszög egy tetsz leges szögfüggvényének értékéb l a többi szögfüggvény pontos értékének kiszámolása.	
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Szögfüggvény.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	<b>Geometria</b> <b>Hasonlóság és kapcsolódó tételek</b>	<b>Órakeret</b> <b>40 óra</b>
<b>Elzárható tudás</b>	Egybevágósági transzformációk. A háromszögek egybevágóságának alapesetei. Számítási és mértani közép. A számítási és a mértani közép közötti egyenlőség.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>	<b>Kapcsolódási pontok</b>	
Kör és részei. Kerületi és középponti szögek, tételek, húrnégyszög		
<p>A párhuzamos szelők tétele (bizonyítás nélkül) és megfordítása, következmények.</p> <p>Szögfelezőtétel.</p> <p>A párhuzamos szelők szakaszok tétele.</p> <p>Szakasz arányos osztása.</p> <p>Negyedik arányos szerkesztése.</p>		
<p>A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai.</p> <p>A hasonlósági transzformáció fogalma és tulajdonságai.</p> <p>Szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok.</p>	<p><i>Földrajz:</i> térképek.</p> <p><i>Vizuális kultúra:</i> tervrajzok.</p> <p><i>Fizika:</i> képalkotás, nagyítás.</p>	
<p>Hasonló alakzatok.</p> <p>A háromszögek hasonlóságának alapesetei.</p> <p>A sokszögek hasonlósága.</p> <p>A hasonló síkidomok területének aránya.</p> <p>A hasonló testek felszínének és térfogatának aránya.</p> <p>Annak tudatosítása, hogy kicsinyítésnél, nagyításnál a lineáris méretek, a felszín és térfogat nem egyformán változik.</p>	<p><i>Fizika:</i> hasonló háromszögek alkalmazása – lejtő mozgás, geometriai optika.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> példák arra, amikor az a hasznos, hogy adott térfogathoz nagy felszín, illetve amikor kis felszín tartozik.</p>	
<p>Arányossági tételek háromszögekben.</p> <p>Magasságtétel, befogótétel.</p> <p>A számítási és a mértani közép közötti egyenlőség geometriai bizonyítása.</p> <p>Mértani közép szerkesztése.</p> <p>Egyszerű szélsőérték-feladatok.</p> <p>Körhöz húzott érintő- és szelők szakaszok tétele.</p> <p>Aranymetszés.</p>	<p><i>Vizuális kultúra:</i> festészet, építészet.</p> <p><i>Ének-zene:</i> az aranymetszés megjelenése zenei művekben.</p>	

Kapcsolat a Fibonacci-sorozattal.	
További nem távolságtartó transzformációk. Mer leges affinitás. Kapcsolat a függvénytranszformációkkal.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Hasonlósági transzformáció, hasonló alakzat, terület, térfogat. Számítási és mértani közép.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Statisztika. valószínűség	Órakeret 16 óra
Elzáró tudás	Adatok elemzése, átlag, táblázatok, grafikonok használata, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség egyszer fogalma. Százalékszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, a kísérletek kiértékelése, következtetések. Adatok rendezése, rendszerezése. Számítógép használata az adatok rendezésében, értékelésében, ábrázolásában. A valószínűség fogalmának mélyítése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
Véletlen jelenségek megfigyelése. Kocka- és pénzérmédobások. Véletlen jelenségek számítógépes szimulációja. Tapasztalatok feldolgozása csoportmunkában.		<i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.
Esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény. Egyszerűbb események valószínűsége. Klasszikus valószínűségi modell. A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel.		
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Események. Valószínűség.	

<b>A fejlesztés várt eredményei a 10. évfolyam végén</b>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete.</li> <li>– Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita és skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során.</li> <li>– Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása.</li> <li>– Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére.</li> </ul> <p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– A gyökvonás fogalmának ismerete, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása, gyökös egyenletek megoldása.</li> <li>– Első- és másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.</li> <li>– Másodfokú függvényekre vezetendő szélsőérték-problémák megoldása.</li> </ul>
--	---

- Nevezetes közepek alkalmazása széls érték problémák megoldásában.
- A számológép használata.

#### *Geometria*

- A kör és részeinek ismerete.
- Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintő négyszögek tételei).
- Hasonlósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a m vészetekben való alkalmazás ismerete.
- Hasonló alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete, alkalmazása.

#### *Függvények, sorozatok*

- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

#### *Valószínűség, statisztika*

- Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. A m veletek elvégzése az eseménytérben.
- A valószínűség klasszikus modelljének alkalmazása.

## 11–12. évfolyam

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás 12 évének szintézisét adja. Egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet, ezt célszerű tudatosítani is a tanulóknál.

Ez a tantervi elem az emelt szint érettségire és a matematika felső iskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl az emelt szint szóbeli érettségire fontos az önálló rendszerzés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, alkalmazási lehetőségek megtalálása, kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az id szakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, emellett sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyekhez kell az előző évek alapozása, és amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi eltt már elvárható többféle ismeret együttes alkalmazása. Minden témában nagy hangsúllyal ki kell térnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakítására. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felső fokú képzésre való készülést.

A rendszeres összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

# 11. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	19 óra
2. Számтан, algebra	58 óra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	30 óra
4. Geometria	64 óra
5. Valószínűség, statisztika	24 óra
Összefoglalásra, gyakorlásra, ismétlésre szánt órakeret (a kerettantervben ún. szabad órakeret, az éves óraszám 10%-a)	11 óra
Ellenőrzés, számonkérés	10 óra
Az összóraszám	216 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	Órakeret 19 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Matematikai állítások elemzése, igaz és hamis állítások. Logikai műveletek: NEM, ÉS, VAGY. Skatulyaelv, logikai szita. Sorbarendezési és kiválasztási feladatok, gráf használata feladatmegoldásban. Gráf, csúcs, él, fokszám.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése. Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrai számok, transzcendens számok.</p> <p>Halmazok számossága. Halmazok ekvivalenciája. Végtelen és véges halmazok. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Kontinuum-sejtés. <i>Matematikatörténet:</i> Cantor, Hilbert, Gödel.</p>		<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság.
<p>Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok, függvények, egyenletek,</p>		



<p>m veletek, ábrák, lefedések, színezések stb. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Pl. Invariáns mennyiség keresésével.) Példák a matematika történetéből lehetetlenségi bizonyításokra.</p>	
<p>Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.) Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel. (Ez utóbbi új elem.) Ismétlés, rendszerezés vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül. Binomiális együtthatók, tulajdonságaik. Pascal háromszög és tulajdonságai. Binomiális tétel. <i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal. Néhány kombinatorikus geometriai probléma. <i>Matematikatörténet:</i> Erdős Pál.</p>	
<p>Gráfok. Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf). Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek. Euler-vonal, Hamilton-kör. Gráfok alkalmazása leszámolásos feladatokban – rendszerezés ismétlés. <i>Matematikatörténet:</i> Euler.</p>	<p><i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p>
<p>A matematika felépítése. Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések. M-veletek a matematikában. M-veleti tulajdonságok. Relációk a matematikában és a mindennapi életben. Relációtulajdonságok. Bizonyítási módszerek áttekintése. Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulyaelv, teljes indukció. Tételek megfordítása.</p>	<p><i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Permutáció, variáció, kombináció, m-velet, reláció, binomiális együttható.</p>

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Hatvány, gyök, logaritmus</b>	<b>Órakeret 43 óra</b>
<p><b>Elzárts tudás</b></p>	<p>Hatványozás egész kitevővel, hatványozás azonosságai, n-edik gyök, gyökvonás azonosságai. Valós számok halmaza.</p>	
<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevőjű hatvány szemléletes fogalmának kialakítása. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek. Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedeztetése.</p>	

<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>A racionális kitev <math>j</math> hatványok, a hatványozás azonosságainak ismétlése.  Számolás racionális kitev <math>j</math> hatványokkal, gyökös kifejezésekkel.  Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.  A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.  Az exponenciális függvény.  Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.</p>		<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i>  kamatszámítás, hitelfelvétel, törleszt részlet-számítás.   <i>Fizika:</i> radioaktivitás.</p>
<p>Exponenciális egyenletek, egyenl tlenségek.  Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.  Exponenciális egyenletre vezet valós problémák megoldása.</p>		<p><i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).</p>
<p>Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.  A logaritmus fogalma.  Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.  A logaritmus azonosságai.  Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra.  Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.  A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.  <i>Matematikatörténet:</i> Napier, Kepler; a logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.</p>		<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i>  zajszennyezés.   <i>Kémia:</i> pH-számítás.</p>
<p>A logaritmusfüggvény.  A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.  Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.  Inverz függvénykapcsolat.</p>		<p><i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.</p>
<p>Logaritmosos egyenletek, egyenl tlenségek.  Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.  Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmosos egyenleteknél.</p>		
<p>Paraméteres exponenciális és logaritmosos egyenletek.</p>		
<p>Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.</p>		
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	<p>Racionális kitev <math>j</math> hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés.  Logaritmus.</p>	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Trigonometria	Órakeret 40 óra
<b>Elzárts tudás</b>	Vektorokkal végzett m veletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszer összefüggések	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A geometriai látásmód fejlesztése. A m velet fogalmának b vítése egy újszer m velettel, a skaláris szorzással. Algebrái és a geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedeztetése más tudományterületeken. A függvényszemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>A vektorokról tanultak rendszerez ismétlése:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– a vektor fogalma,</li> <li>– vektorm veletek,</li> <li>– vektorfelbontás.</li> </ul> <p>A vektorok koordinátaival végzett m veletek és tulajdonságaik.</p> <p>A vektor 90°-os elforgatottjának koordinátaí.</p>		
<p>A szögfüggvények általános értelmezése.</p> <p>Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták.</p> <p>A szögfüggvények el jele a különböz síknegyedekben.</p> <p>Szögfüggvények közötti összefüggések.</p> <p>Egyszer trigonometrikus összefüggések bizonyítása.</p> <p>A trigonometrikus függvények.</p> <p>A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, széls érték, periódus, monotonitás, paritás</p> <p>A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezg mozgás, hullámmozgás leírása.</p> <p><i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése számítógépes programmal.</p>	
<p>Két vektor skaláris szorzata.</p> <p>A skaláris szorzat tulajdonságai.</p> <p>A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban.</p> <p>Mer leges vektorok skaláris szorzata.</p> <p>Szükséges és elégséges feltétel.</p> <p>Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével.</p> <p>A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenl tlenség kapcsolata.</p> <p>Vektorok vektoriális szorzata.</p> <p>(Szemléletes kép, bizonyítások nélkül.)</p>	<p><i>Fizika:</i> munka, elektromosság.</p>	
<p>A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével.</p> <p>A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével.</p> <p>Színusztétel.</p> <p>Koszínusztétel.</p> <p>A tételek pontos kimondása, bizonyítása.</p> <p>Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> alakzatok adatainak meghatározása.</p> <p><i>Földrajz:</i> Távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok.</p>	

<p>Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata. Szögtávolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is. Bizonyítási feladatok.</p>	<p>GPS: helymeghatározás.</p>
<p>Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,</li> <li>– egy szög kétszeresének szögfüggvényei,</li> <li>– félszögek szögfüggvényei,</li> <li>– két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása.</li> </ul> <p>A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása. Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása. Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.</p>	
<p>Trigonometrikus egyenletek. Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése. Trigonometrikus egyenletrendszerek. Grafikus megoldás, vagy egységkör alkalmazása. Időfüggő periodikus jelenségek vizsgálata. Trigonometrikus kifejezések szélső értékének keresése.</p>	<p><i>Fizika:</i> rezgő mozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Skaláris szorzat, szinusztétel, koszinusztétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet, egyenletrendszer.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Koordinátageometria	Órakeret 24 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Koordináta-rendszer, vektorok, vektorműveletek megadása koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Elsőfokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
A Descartes-féle koordináta-rendszer. A helyvektor és a szabadvektor.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Vektor abszolút értékének kiszámítása. Két pont távolságának kiszámítása. A Pitagorasz-tétel alkalmazása. Két vektor hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.		
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái.		<i>Fizika:</i> alakzatok tömegközéppontja.

Elemi geometriai ismereteket alkalmazunk, vektorokat használunk, koordinátákat számolunk.		
<p>Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző <math>k</math> jellemzők közötti kapcsolat értéke, használata.</p> <p>Az egyenes egyenletei.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete.</li> <li>– Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszer térben.</li> <li>– Iránytényező s egyenlet.</li> </ul> <p>Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel. Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.</p> <p>Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele. Két egyenes metszéspontja. Két egyenes szöge. Skaláris szorzat használata.</p>		<p><i>Fizika:</i> mérések értékelése.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>A kör egyenlete. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.</p> <p>Kör és egyenes kölcsönös helyzete. A kör érintőjének egyenlete. Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthető ségi kérdések.</p>		<p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>A parabola tengelyponti egyenlete. A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes. A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés. A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.</p>		<p><i>Fizika:</i> geometriai optika, fényszóró, visszapiillantó tükör.</p>
<p>Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével, vagy a szerkesztés menetének követésével. Mértani helyek keresése. Apollóniusz-kör. Merőleges affinitással kapott mértani helyek. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenletrendszerrel megadott egyszerű feltételek.</p>		<p><i>Informatika:</i> több feltétel együttes vizsgálata.</p>
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező $s$ . Egyenes, kör, parabola egyenlete.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Sorozatok	Órakeret 30 óra
<b>Elzeter tudás</b>	Számítási sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések hatékony alkalmazása.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszeres ismétlése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat. Rekurzív sorozat <math>n</math>-edik elemének megadása. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>		<i>Informatika:</i> algoritmusok.
<p>Számítási sorozat. A számítási sorozat <math>n</math>-edik tagja. A számítási sorozat első <math>n</math> tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat <math>n</math>-edik tagja. A mértani sorozat első <math>n</math> tagjának összege. <i>Matematikatörténet:</i> Gauss. Számítási feladatok számítási és mértani sorozatokra. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. A számítási sorozat mint lineáris, és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztés részlet, hitel, THM, gy jt járadék. Véges sorok összegzése. Számítási és mértani sorozatból el állított szorzatok összegzése.</p>		<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> lineáris és exponenciális folyamatok.</p> <p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> hitel – adósság – eladósodás.</p>
<p>Sorozatok konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Miveltek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Az <math>\sqrt[n]{a}</math>, <math>\sqrt[n]{n}</math> <math>\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n</math> sorozatok. Konvergens sorozatok tulajdonságai. Törlődési pont. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rend relv.</p>		
<p>Végtelen sorok. Végtelen sor konvergenciája, összege.</p>		

<p>Végtelen mértani sor.  Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.  További példák konvergencia sorokra.  Teleszkópos összegek.  Négyzetszámok reciprokainak összege.</p>	
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Nevezetes egyenl tlenések, széls érték-feladatok elemi megoldása</b>	<b>Órakeret 15 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Nevezetes azonosságok ismerete. Közepek és sorrendjük ismerete két változóra. Másodfokú és trigonometrikus függvények ismerete.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása. A modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal. A széls érték-problémához ill megoldási mód kiválasztása. Gyakorlat szerzése optimális megoldások keresésében.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Azonos egyenl tlenések.  Nevezetes közepek közötti egyenl tlenések.  (Több változós alak bizonyítása fokozatos közelítés módszerével.)  Nevezetes közepek közötti egyenl tlenések alkalmazása széls érték-feladatok megoldásában.  Széls érték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével.  (Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.)  Széls érték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével.  Környezetvédelem: legrövidebb utak és egyéb optimális módszerek keresése.  Bernoulli-egyenl tlenég.  Cauchy-egyenl tlenég.  Jensen-egyenl tlenég. (Bizonyítás nélkül, szemléletes képpel.)</p>		
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Széls érték. Nevezetes közép.	

<b>Tematikai egység Fejlesztési cél</b>	<b>Statisztika, valószínűség</b>	<b>Órakeret 24 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési</b>	A valószínűség fogalmának b vítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a	

<b>céljai</b>	valószínűség – a nagy számok törvénye.	
	<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>	<b>Kapcsolódási pontok</b>
	<p>Statisztikai mintavétel. Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül. Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás. Gyakorlati példák arra, hogy mikor melyik mutatóval célszerű jellemezni a számsokaságot. Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés. A medián és az átlag minimumtulajdonsága. Közvélemény-kutatás, statisztikai évkönyv, minőségellenőrzés.</p>	<p><i>Informatika:</i> táblázatkezelés, adatbázis-kezelő program használata.</p> <p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> választások.</p>
	<p>Eseményalgebra. Kapcsolat a halmazok és logika műveleteivel. <i>Matematikatörténet:</i> George Boole.</p>	
	<p>Véletlen jelenségek megfigyelése. A modell és a valóság kapcsolata. Véletlen jelenségek számítógépes szimulációja. Szerencsejátékok elemzése. Klasszikus valószínűségi modell. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján. Nagy számok törvénye (szemléletes tárgyalás képletek nélkül). Geometriai valószínűség, várható érték. <i>Matematikatörténet:</i> Pólya György, Rényi Alfréd.</p>	<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</p>
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Valószínűség, kizáró esemény, független esemény.	
<b>A fejlesztés várt eredményei a 11. évfolyam végén</b>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Halmazok számsokaságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.</li> <li>– A kombinatorikai problémák rendszerezése.</li> <li>– Bizonyítási módszerek áttekintése.</li> <li>– A gráfok eszközjellegű használata probléma megoldásában.</li> </ul> <p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.</li> <li>– A logaritmus fogalmának ismerete.</li> <li>– A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben probléma megoldása céljából.</li> <li>– Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, ellenőrzése.</li> <li>– Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.</li> <li>– Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.</li> <li>– A számológép biztos használata.</li> </ul>	



*Függvények, az analízis elemei*

- Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk.
- Exponenciális folyamatok matematikai modellje.
- A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.
- Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.
- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.

*Geometria*

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

*Valószínűség, statisztika*

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.

# 12. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	-
2. Számтан, algebra	-
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	45 óra
4. Geometria	65 óra
5. Valószínűség, statisztika	-
Összefoglalásra, gyakorlásra, ismétlésre szánt órakeret	95 óra
Ellenőrzés, számonkérés	12 óra
Az össz. óraszám	217 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Folytonosság, differenciálszámítás	Órakeret 45 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékkészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélső érték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai:</b>	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. Alkalmazások keresése a matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerezés ismétlése.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.
Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.		

<p>Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.</p> <p>A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata.</p> <p>A <math>\frac{\sin x}{x}</math> függvény vizsgálata, az <math>x = 0</math> helyen vett határértéke.</p> <p>A határérték számítógépes becslése.</p>	
<p>A függvények folytonossága.</p> <p>Példák folytonos és nem folytonos függvényekre.</p> <p>A folytonosság definíciói.</p> <p>Intervallumon folytonos függvények.</p> <p>Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.</p> <p>(Bizonyítások nélkül, de ellenpéldák mutatásával azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve, ha a függvény nem folytonos.)</p>	<p><i>Fizika:</i> példák folytonos és diszkrét mennyiségekre.</p>
<p>Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának el készítésére.</p> <p>A függvénygörbe érintőjének iránytangense.</p> <p>A pillanatnyi sebesség meghatározása.</p>	<p><i>Fizika:</i> az út-id függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata; a sebesség-id függvény és a gyorsulás kapcsolata. A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> populáció növekedésének átlagos sebessége.</p>
<p>A differenciálhatóság fogalma.</p> <p>A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.</p> <p>Példák nem differenciálható függvényekre is.</p> <p>Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.</p> <p>Alapfüggvények deriváltja: konstans függvény, <math>x^n</math>, trigonometrikus függvények deriváltja.</p> <p>Műveletek differenciálható függvényekkel.</p> <p>Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltja.</p> <p>Inverz függvény deriváltja.</p> <p>Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.)</p> <p>Magasabb rendű deriváltak.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.</p>
<p>A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.</p> <p>Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.</p> <p>Szélésérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.</p> <p>A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú függvények (pl. út-id, sebesség-id) deriváltjainak jelentése.</p>

Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.	
Függvényvizsgálat differenciálszámítással. Összevetés az elemi módszerekkel.	
Gyakorlati jelleg széls érték-feladatok megoldása. A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.	<i>Fizika:</i> Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény. Fizikai jelleg széls érték-problémák.
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Függvény folytonossága, határértéke. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rend derivált. Monotonitás, lokális széls érték, abszolút széls érték. Konvex, konkáv függvény.

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Integrálszámítás, térgeometria</b>	<b>Órakeret 65 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Folytonos függvények fogalma. Területszámítás elemei. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Az integrálszámítás módszereivel találkozáskor b vítjük a közelít módszerek ismeretét. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén. Áttekint képet alakítunk ki a térgeometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereir l.	
<b>Ismeretek és fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
A területszámítás alapelvei. Néhány egyszer bb alakzat területének levezetése az alapelvekb l. A területszámítás módszereinek áttekintése. Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben (pl. geometriai bizonyításokban).		
A térfogatszámítás alapelvei. Néhány egyszer bb test térfogatának levezetése az alapelvekb l. A térfogatszámítás áttekintése. A térfogatszámítás néhány új eleme. Cavalieri-elv, a gúla térfogata. Csonka gúla térfogata. Érint poliéderek térfogata. Alakzatok felszíne, hálójá. Csonkakúp felszíne. Gömb felszínének levezetése (heurisztikus, nem precíz módszerrel).		
Térgeometria elemei. Tetraéderekre vonatkozó tételek. (Van-e beírt, körülírt gömbje, súlypontja, magasságpontja?)		<i>Kémia:</i> kristályok.  <i>M vészetek:</i>

<p>Ortogonalis tetraéder. Tetraéder és paralelepipedon. Euler-féle poliéder-tétel. (Bizonyítás nélkül.) Szabályos testek.</p>	<p>szimmetriák.</p>
<p>Bevezető feladatok az integrál fogalmához. Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület. A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.</p>	
<p>Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva jutunk el a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-eljeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére. <i>Matematikatörténet: Bernhard Riemann.</i></p>	
<p>Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.</p>	<p><i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetetlenségi nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség, feszültség.</p>
<p>Az integrál mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál: – hatványfüggvény, polinom függvény; – trigonometrikus függvények; – exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. A Newton-Leibniz tétel. Integrálási módszerek: integrálás helyettesítéssel. <i>Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.</i></p>	
<p>Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.</p>	<p><i>Fizika:</i> Potenciál, munkavégzés</p>

<p>Forgástest térfogatának meghatározása. Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata. Az integrálás közelítésmódszerei – numerikus módszerek.</p>	<p>elektromos, illetve gravitációs erőtérben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség.</p>
<p>Néhány egyszerűbb improprius integrál. Néhány hatványsor (formális meghatározás integrálással). Hatványsorok szerepe a matematikában, fizikában, informatikában. Hogyan számolnak az egyszerű számológépek 12 jegy pontossággal?</p>	
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Alsó és felső közelítésszeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Felszín, térfogat, forgástest, csonkakúp, csonkakúp, gömb.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Rendszerezés összefoglalás	Órakeret 95 óra
<b>Előzetes tudás</b>	A4 év matematika tananyaga.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben. Felkészítés az emelt szintű érettségire: az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének továbbfejlesztése, alkalmazási lehetőségek megtalálása. Kapcsolatok keresése különböző témakörök között.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p><i>Gondolkodási módszerek</i> <i>Halmazok, matematikai logika</i> Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz. Halmazok közötti műveletek. Végtelen halmazok elmélete; számosságok. Állítások, logikai értékük. Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Univerzális és egzisztenciális kvantor. <i>Kombinatorika, gráfok, algoritmusok</i> Permutáció, variáció, kombináció. Binomiális tétel. Pascal háromszög. Elemi gráfelméleti ismeretek. Euler-féle poliédertétel. A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása. Nevezetes sejtések.</p>		<p><i>Filozófia:</i> gondolati rendszerek felépítése, fejlődése.</p>
<p><i>Algebra és számelmélet</i> <i>Műveletek kifejezésekkel</i> Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok. A hatványozás azonosságai.</p>		<p><i>Fizika; kémia:</i> számítási feladatok megoldása.</p>

<p>A matematikai fogalmak fejlődése, permanencia-elv. Gyökös kifejezések átalakításai. Exponenciális és logaritmikus kifejezések átalakításai.</p> <p><i>Számelmélet</i> Oszthatósági szabályok. Számolás maradékokkal. Prímszámok. Oszthatósági feladatok megoldása.</p> <p><i>Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenletrendszer</i> Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenletrendszerek, egyenletrendszerek. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenletrendszerek, egyenletrendszerek. Gyökös egyenletek, egyenletrendszerek. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenletrendszerek. Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenletrendszerek. Polinomok algebrája. Paraméteres egyenletek, egyenletrendszerek.</p>	
<p><i>Függvények, sorozatok, az analízis elemei</i> <i>Függvények</i> A függvény fogalma. Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolútérték, exponenciális, logaritmus-, trigonometrikus függvények. Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint. Függvénytranszformációk. Valós folyamatok elemzése függvénytanilag modellek szerint.</p> <p><i>Sorozatok, sorok</i> A sorozat fogalma. Számítási, mértani sorozat. Rekurzióval megadott egyéb sorozatok. Sorozatok monotonitása, konvergenciája. A végtelen mértani sor.</p> <p><i>Analízis</i> Függvények korlátossága és monotonitása. Függvény határértéke, folytonossága. Differenciálhányados, derivált függvény. Differenciálási szabályok. L'Hospital-szabály. Függvényvizsgálat differenciálás segítségével. Szélsőérték-meghatározási módok. A tanult függvények primitív függvényei. Integrálási módszerek. A határozott integrál. Newton-Leibniz tétel. A határozott integrál alkalmazásai. Improprius integrál.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes programok használata függvények ábrázolására, vizsgálatára.</p> <p><i>Fizika:</i> Az analízis alkalmazásai a fizikában. A matematika és a fizika kölcsönhatása az analízis módszereinek kialakulásában.</p>

<p><i>Geometria</i></p> <p><i>Geometriai alapfogalmak</i> Térelemek köcsönös helyzete, távolsága, szöge.</p> <p><i>Geometriai alakzatok, bizonyítások</i> Nevezetes ponthalmazok. Síkidomok, testek, tulajdonságaik. Elemi sík- és térgeometriai tételek.</p> <p><i>Geometriai transzformációk</i> Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik. Szerepük a bizonyításokban és a szerkesztésekben.</p> <p><i>Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria</i> Vektor fogalma, m veletek a vektorok körében. Matematikai fogalmak fejlődésének követése. Vektorfelbontás, vektorok koordinátái. Hegyesszög szögfüggvényei. Szinusz- és koszinusztétel. A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása. Trigonometrikus azonosságok. Az egyenes egyenletei, egyenletrendszere (síkban és térben). A kör egyenletei. A kúpszeletek definíciója, egyenleteik.</p> <p><i>Geometriai mértékek</i> A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik. A kétoldali közelítés módszere. A terület fogalma és kiszámítási módjai. A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai. Az integrálszámítás felhasználása alakzatok mértékének kiszámításához.</p>	<p><i>M vészetek:</i> szimmetriák, arany metszés.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes geometriai programok használata.</p>
<p><i>Valószínű ségszámítás, statisztika</i> Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás. Eseményalgebra és m veleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer. A mateatika különböző területeinek összekapcsolása: Boole-algebra. Grafikonok, táblázatok, diagrammok készítése és olvasása. Valószínű ségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. A valószínű ség kiszámítási módjai. Feltételes valószínű ség. Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján. Szerepük a mindennapi életben. A véletlen szabályszer ségei, a nagy számok törvénye. A közvéleménykutatás elemei.</p>	<p><i>Informatika:</i> táblázatkezel , adatbázis-kezel program használata.</p> <p><i>Fizika:</i> fizikai jelenségek valószínű ségi modellje.</p>
<p><i>Motivációs témakörök</i> Néhány matematikatörténeti szemelvény. A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. Pl. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról. Matematikusokkal kapcsolatos történetek. Matematika alapú játékok. Elemz készség fejlesztése.</p>	<p><i>Informatika:</i> könyvtárhasználat, internethasználat.</p>



<p>Logikai feladványok, konstrukciós feladatok.  Kreativitás fejlesztése.  A matematika néhány filozófiai kérdése.  A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői.  Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma.</p>	
---	--

<p><b>A fejlesztés várt eredményei a 12. évfolyam végén</b></p>	<p><i>Függvények, az analízis elemei</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.</li> <li>– Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása</li> </ul> <p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.</li> <li>– Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.</li> </ul>
---	---

## **Specializáció**

### **11–12. évfolyam**

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás 12 évének szintézisét adja. Egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet, ezt célszerű tudatosítani is a tanulóknál.

Ez a tantervi elem az emelt szint érettségire és a matematika felső iskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl az emelt szint szóbeli érettségire fontos az önálló rendszerzés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, alkalmazási lehetőségek megtalálása, kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, emellett sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyekhez kell az előző évek alapozása, és amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható többféle ismeret együttes alkalmazása. Minden témában nagy hangsúllyal ki kell térnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakítására. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felső fokú képzésre való készülést.

A rendszeres összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

# 11. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	19 óra
2. Számтан, algebra	58 óra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	30 óra
4. Geometria	64 óra
5. Valószínűség, statisztika	24 óra
Összefoglalásra, gyakorlásra, ismétlésre szánt órakeret (a kerettantervben ún. szabad órakeret, az éves óraszám 10%-a)	11 óra
Ellenőrzés, számonkérés	10 óra
Az összóraszám	216 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	Órakeret 19 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Matematikai állítások elemzése, igaz és hamis állítások. Logikai műveletek: NEM, ÉS, VAGY. Skatulyaelv, logikai szita. Sorbarendezési és kiválasztási feladatok, gráf használata feladatmegoldásban. Gráf, csúcs, él, fokszám.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése. Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrai számok, transzcendens számok.</p> <p>Halmazok számossága. Halmazok ekvivalenciája. Végtelen és véges halmazok. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Kontinuum-sejtés.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Cantor, Hilbert, Gödel.</p>		<p><i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság.</p>

<p>Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok, függvények, egyenletek, m veletek, ábrák, lefedések, színezések stb. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Pl. Invariáns mennyiség keresésével.) Példák a matematika történetéből lehetetlenségi bizonyításokra.</p>	
<p>Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.) Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel. (Ez utóbbi új elem.) Ismétlés, rendszerezés vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül. Binomiális együtthatók, tulajdonságaik. Pascal háromszög és tulajdonságai. Binomiális tétel. <i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal. Néhány kombinatorikus geometriai probléma. <i>Matematikatörténet:</i> Erdős Pál.</p>	
<p>Gráfok. Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf). Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek. Euler-vonal, Hamilton-kör. Gráfok alkalmazása leszámolásos feladatokban – rendszerezés ismétlés. <i>Matematikatörténet:</i> Euler.</p>	<p><i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.</p>
<p>A matematika felépítése. Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések. M veletek a matematikában. M veleti tulajdonságok. Relációk a matematikában és a mindennapi életben. Relációtulajdonságok. Bizonyítási módszerek áttekintése. Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulyaelv, teljes indukció. Tételek megfordítása.</p>	<p><i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége.</p>
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Permutáció, variáció, kombináció, m velet, reláció, binomiális együttható.</p>

<p><b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b></p>	<p><b>Hatvány, gyök, logaritmus</b></p>	<p><b>Órakeret 43 óra</b></p>
<p><b>Elzeter tudás</b></p>	<p>Hatványozás egész kitevővel, hatványozás azonosságai, gyökvonás azonosságai. Valós számok halmaza.</p>	

<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevő <math>j</math> hatvány szemléletes fogalmának kialakítása. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek. Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedeztetése.</p>
<p><b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b></p>	<p><b>Kapcsolódási pontok</b></p>
<p>Az <math>n</math>-edik gyök fogalma.  A gyökkvonás azonosságai.  Páros és páratlan gyökkitevő .  Bevitel a gyökjel alá. Kivétel a gyökjel alól.  A szerkeszthetőség néhány kérdése.</p> <p>A tört kitevő <math>j</math> hatvány. Permanencia-elv. A racionális kitevő <math>j</math> hatványok, a hatványozás azonosságainak ismétlése.  Számolás racionális kitevő <math>j</math> hatványokkal, gyökös kifejezésekkel.</p> <p>Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.  A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.  Az exponenciális függvény.  Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i>  kamatszámítás, hitelfelvétel, törlesztés részlet-számítás.</p> <p><i>Fizika:</i> radioaktivitás.</p>
<p>Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek.  Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.  Exponenciális egyenletre vezethető valós problémák megoldása.</p>	<p><i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).</p>
<p>Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.  A logaritmus fogalma.  Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.  A logaritmus azonosságai.  Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra.  Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.  A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.  <i>Matematikatörténet:</i> Napier, Kepler; a logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i>  zajszennyezés.</p> <p><i>Kémia:</i> pH-számítás.</p>
<p>A logaritmusfüggvény.  A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.  Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.  Inverz függvénykapcsolat.</p>	<p><i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.</p>
<p>Logaritmusos egyenletek, egyenletrendszerek.</p>	

Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél.	
Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.	
Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.	
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Racionális kitevő hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés. Logaritmus.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Trigonometria	Órakeret 40 óra
<b>Elzárts tudás</b>	Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése egy egyszerű művelettel, a skaláris szorzással. Algebrai és a geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedeztetése más tudományterületeken. A függvény szemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>A vektorokról tanultak rendszerezés ismétlése:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– a vektor fogalma,</li> <li>– vektorműveletek,</li> <li>– vektorfelbontás.</li> </ul> <p>A vektorok koordinátaival végzett műveletek és tulajdonságaik. A vektor <math>90^\circ</math>-os elforgatottjának koordinátái.</p>		
<p>A szögfüggvények általános értelmezése. Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták. A szögfüggvények eljele a különböző síknegyedekben. Szögfüggvények közötti összefüggések. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. A trigonometrikus függvények. A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélső érték, periódus, monotonitás, paritás A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.</p>		<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása.</p> <p><i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése számítógépes programmal.</p>
<p>Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban. Merőleges vektorok skaláris szorzata. Szükséges és elégséges feltétel. Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével. A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlettelenségek kapcsolata.</p>		<p><i>Fizika:</i> munka, elektromosság.</p>

Vektorok vektoriális szorzata. (Szemléletes kép, bizonyítások nélkül.)	
A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével. A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével. Szinusztétel. Koszinusztétel. A tételek pontos kimondása, bizonyítása. Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel. Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata. Szögtávolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is. Bizonyítási feladatok.	<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> alakzatok adatainak meghatározása.  <i>Földrajz:</i> Távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok. GPS: helymeghatározás.
Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek: <ul style="list-style-type: none"> <li>– két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,</li> <li>– egy szög kétszeresének szögfüggvényei,</li> <li>– félszögek szögfüggvényei,</li> <li>– két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása.</li> </ul> A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása. Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása. Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.	
Trigonometrikus egyenletek. Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése. Trigonometrikus egyenletrendszerek. Grafikus megoldás, vagy egységkör alkalmazása. Időfüggő periodikus jelenségek vizsgálata. Trigonometrikus kifejezések szélső értékének keresése.	<i>Fizika:</i> rezgő mozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok meghatározása.
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Skaláris szorzat, szinusztétel, koszinusztétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet, egyenletrendszer.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Koordinátageometria	Órakeret 24 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Koordináta-rendszer, vektorok, vektormeghatározás koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Első fokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
A Descartes-féle koordináta-rendszer.		<i>Informatika:</i>

A helyvektor és a szabadvektor.	számítógépes program használata.
Vektor abszolút értékének kiszámítása. Két pont távolságának kiszámítása. A Pitagorasz-tétel alkalmazása. Két vektor hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.	
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái. Elemi geometriai ismereteket alkalmazunk, vektorokat használunk, koordinátákat számolunk.	<i>Fizika:</i> alakzatok tömegközéppontja.
Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értéke, használata. Az egyenes egyenletei. <ul style="list-style-type: none"> <li>– Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete.</li> <li>– Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszer térben.</li> <li>– Iránytényező s egyenlet.</li> </ul> Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel. Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása. Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele. Két egyenes metszéspontja. Két egyenes szöge. Skaláris szorzat használata.	<i>Fizika:</i> mérések értékelése.  <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
A kör egyenlete. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata. Kör és egyenes kölcsönös helyzete. A kör érintőjének egyenlete. Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthető ségi kérdések.	<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
A parabola tengelyponti egyenlete. A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes. A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés. A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.	<i>Fizika:</i> geometriai optika, fényszóró, visszapiillantó tükör.
Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével, vagy a szerkesztés menetének követésével. Mértani helyek keresése. Apollóniusz-kör.	<i>Informatika:</i> több feltétel együttes vizsgálata.



<p>Mer leges affinitással kapott mértani helyek. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenl tlen séggel megadott egyszer feltételek.</p>	
--	--

<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényez . Egyenes, kör, parabola egyenlete.
------------------------------------	--

<b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b>	<b>Sorozatok</b>	<b>Órakeret 30 óra</b>
<b>El zetes tudás</b>	Számtani sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszer alapösszefüggések.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések hatékony alkalmazása.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerez ismétlése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat. Rekurzív sorozat <math>n</math>-edik elemének megadása. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>		<i>Informatika:</i> algoritmusok.
<p>Számtani sorozat. A számtani sorozat <math>n</math>-edik tagja. A számtani sorozat els <math>n</math> tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat <math>n</math>-edik tagja. A mértani sorozat els <math>n</math> tagjának összege. <i>Matematikatörténet:</i> Gauss. Számítási feladatok számtani és mértani sorozatokra. Szöveges faladatok gyakorlati alkalmazásokkal. A számtani sorozat mint lineáris, és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törleszt részlet, hitel, THM, gy jt járadék. Véges sorok összegzése. Számtani és mértani sorozatból el állított szorzatok összegzése.</p>		<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> lineáris és exponenciális folyamatok.</p> <p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> hitel – adósság – eladósodás.</p>
<p>Sorozatok konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. M veletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Az <math>\sqrt[n]{a}</math>, <math>\sqrt[n]{n}</math> <math>\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n</math> sorozatok. Konvergens sorozatok tulajdonságai.</p>		

<p>Torlódási pont.  Konvergens sorozatnak egy határértéke van.  Minden konvergens sorozat korlátos.  Monoton és korlátos sorozat konvergens.  Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenl tlenségek.  Rend relv.</p>	
<p>Végtelen sorok.  Végtelen sor konvergenciája, összege.  Végtelen mértani sor.  Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.  További példák konvergens sorokra.  Teleszkópos összegek.  Négyzetszámok reciprokainak összege.</p>	
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.</p>

<p><b>Tematikai egység/ Fejlesztési cél</b></p>	<p><b>Nevezetes egyenl tlenségek, széls érték-feladatok elemi megoldása</b></p>	<p><b>Órakeret 15 óra</b></p>
<p><b>El zetes tudás</b></p>	<p>Nevezetes azonosságok ismerete. Közepék és sorrendjük ismerete két változóra. Másodfokú és trigonometrikus függvények ismerete.</p>	
<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása. A modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal. A széls érték-problémához ill megoldási mód kiválasztása. Gyakorlat szerzése optimális megoldások keresésében.</p>	
<p><b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b></p>		<p><b>Kapcsolódási pontok</b></p>
<p>Azonos egyenl tlenségek.  Nevezetes közepek közötti egyenl tlenségek.  (Több változós alak bizonyítása fokozatos közelítés módszerével.)  Nevezetes közepek közötti egyenl tlenségek alkalmazása széls érték-feladatok megoldásában.  Széls érték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével.  (Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.)  Széls érték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével.  Környezetvédelem: legrövidebb utak és egyéb optimális módszerek keresése.  Bernoulli-egyenl tlenség.  Cauchy-egyenl tlenség.  Jensen-egyenl tlenség. (Bizonyítás nélkül, szemléletes képpel.)</p>		
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Széls érték. Nevezetes közép.</p>	

Tematikai egység Fejlesztési cél	Statisztika, valószínűség	Órakeret 24 óra
<b>Elzetes tudás</b>	Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b>	A valószínűség fogalmának b vítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye.	
<b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>Statisztikai mintavétel. Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül. Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás. Gyakorlati példák arra, hogy mikor melyik mutatóval célszerű jellemezni a számsokaságot. Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés. A medián és az átlag minimumtulajdonsága. Közvélemény-kutatás, statisztikai évkönyv, min ségellen rzés.</p>		<p><i>Informatika:</i> táblázatkezel , adatbázis-kezel program használata.</p> <p><i>Történelem,</i> <i>társadalmi és</i> <i>állampolgári</i> <i>ismeretek:</i> választások.</p>
<p>Eseményalgebra. Kapcsolat a halmazok és logika m veleteivel. <i>Matematikatörténet:</i> George Boole.</p>		
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése. A modell és a valóság kapcsolata. Véletlen jelenségek számítógépes szimulációja. Szerencsejátékok elemzése. Klasszikus valószínűségi modell. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján. Nagy számok törvénye (szemléletes tárgyalás képletek nélkül). Geometriai valószínűség, várható érték. <i>Matematikatörténet:</i> Pólya György, Rényi Alfréd.</p>		<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</p>
<b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b>	Valószínűség, kizáró esemény, független esemény.	

**A fejlesztés várt eredményei a 11. évfolyam végén**

*Gondolkodási és megismerési módszerek*

- Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.
- A kombinatorikai problémák rendszerezése.
- Bizonyítási módszerek áttekintése.
- A gráfok eszköz jelleg használata probléma megoldásában.

*Számelmélet, algebra*

- A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben probléma megoldása céljából.
- Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, ellenőrzése.
- Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.
- Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.
- A számológép biztos használata.

*Függvények, az analízis elemei*

- Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk.
- Exponenciális folyamatok matematikai modellje.
- A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.
- Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.
- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.

*Geometria*

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

*Valószínűség, statisztika*

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.

## 12. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	-
2. Számtan, algebra	-
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	45 óra
4. Geometria	65 óra
5. Valószínűség, statisztika	-
Összefoglalásra, gyakorlásra, ismétlésre szánt órakeret	95 óra
Ellenőrzés, számonkérés	12 óra
Az össz. óraszám	217 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Folytonosság, differenciálszámítás	Órakeret 45 óra
<b>Előzetes tudás</b>	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékkészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélső érték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
<b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai:</b>	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. Alkalmazások keresése a	

matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerezés ismételése.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.</p>
<p>Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke. A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata. A <math>\frac{\sin x}{x}</math> függvény vizsgálata, az <math>x = 0</math> helyen vett határértéke. A határérték számítógépes becslése.</p>	
<p>A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. A folytonosság definíciói. Intervallumon folytonos függvények. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai. (Bizonyítások nélkül, de ellenpéldák mutatásával azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve, ha a függvény nem folytonos.)</p>	<p><i>Fizika:</i> példák folytonos és diszkrét mennyiségekre.</p>
<p>Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére. A függvénygörbe érintőjének iránytangense. A pillanatnyi sebesség meghatározása.</p>	<p><i>Fizika:</i> az út-id függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata; a sebesség-id függvény és a gyorsulás kapcsolata. A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> populáció növekedésének átlagos sebessége.</p>
<p>A differenciálhatóság fogalma. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja: konstans függvény, <math>x^n</math>, trigonometrikus függvények deriváltja.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.</p>

<p>M veletek differenciálható függvényekkel.  Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltja.  Inverz függvény deriváltja.  Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.)  Magasabb rend deriváltak.  <i>Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.</i></p>		
<p>A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.  Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.  Széls érték – lokális széls érték, abszolút széls érték.  A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.</p>		<p><i>Fizika: fizikai tartalmú függvények (pl. út-id , sebesség-id ) deriváltjainak jelentése.</i></p>
<p>Konvexitás vizsgálata deriválással.  A konvexitás definíciója.  Inflexiós pont.  A második derivált és a konvexitás kapcsolata.</p>		
<p>Függvényvizsgálat differenciálszámítással.  Összevetés az elemi módszerekkel.</p>		
<p>Gyakorlati jelleg széls érték-feladatok megoldása.  A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.</p>		<p><i>Fizika: Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény. Fizikai jelleg széls érték-problémák.</i></p>
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Függvény folytonossága, határértéke. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rend derivált. Monotonitás, lokális széls érték, abszolút széls érték. Konvex, konkáv függvény.</p>	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Integrálszámítás, térgeometria	Órakeret 65 óra
El zetes tudás	Folytonos függvények fogalma. Területszámítás elemei. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az integrálszámítás módszereivel találkozáva b vítjük a közelít módszerek ismeretét. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén. Áttekint képet alakítunk ki a térgeometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereir l.	
<b>Ismeretek és fejlesztési követelmények</b>		<b>Kapcsolódási pontok</b>
<p>A területszámítás alapelvei.  Néhány egyszer bb alakzat területének levezetése az alapelvekb l.  A területszámítás módszereinek áttekintése.  Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben (pl. geometriai bizonyításokban).</p>		
<p>A térfogatszámítás alapelvei.  Néhány egyszer bb test térfogatának levezetése az</p>		

<p>alapelvekből.</p> <p>A térfogatszámítás áttekintése.</p> <p>A térfogatszámítás néhány új eleme.</p> <p>    Cavalieri-elv, a gúla térfogata.</p> <p>    Csonka gúla térfogata.</p> <p>    Érint poliéderek térfogata.</p> <p>Alakzatok felszíne, hálóját.</p> <p>    Csonkakúp felszíne.</p> <p>Gömb felszínének levezetése (heurisztikus, nem precíz módszerrel).</p>	
<p>Térgeometria elemei.</p> <p>Tetraéderekre vonatkozó tételek.</p> <p>    (Van-e beírt, körülírt gömbje, súlypontja, magasságpontja?)</p> <p>    Ortogonalis tetraéder.</p> <p>    Tetraéder és paralelepipedon.</p> <p>Euler-féle poliéder-tétel. (Bizonyítás nélkül.)</p> <p>Szabályos testek.</p>	<p><i>Kémia:</i> kristályok.</p> <p><i>Méchanika:</i> szimmetriák.</p>
<p>Bevezető feladatok az integrál fogalmához.</p> <p>    Függvény grafikonja alatti terület.</p> <p>    A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület.</p> <p>    A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.</p>	
<p>Alsó és felső közelítő összegek.</p> <p>    Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása.</p> <p>    Közelítés véges összegekkel.</p> <p>A határozott integrál fogalma, jelölése.</p> <p>    A szemléletes megközelítésre alapozva jutunk el a pontos definícióig.</p> <p>    Példa nem integrálható függvényre is.</p> <p>    Negatív függvény határozott integrálja.</p> <p>    A határozott integrál és a terület-egyenlőség terület.</p> <p>    Az integrál közelítő kiszámítása.</p> <p>    Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Bernhard Riemann.</p>	
<p>Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.</p> <p>Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.</p> <p>A határozott integrál tulajdonságai.</p>	<p><i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia.</p> <p>Elektromos feszültség két pont között, a potenciál.</p> <p>Tehetetlenségi nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség, feszültség.</p>
<p>Az integrál mint a felső határ függvénye.</p> <p>Integrálfüggvény.</p>	



<p>Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál: – hatványfüggvény, polinom függvény; – trigonometrikus függvények; – exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. A Newton-Leibniz tétel. Integrálási módszerek: integrálás helyettesítéssel. <i>Matematikatörténet:</i> Newton, Leibniz, Euler.</p>	
<p>Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása. Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata. Az integrálás közelítésmódszerei – numerikus módszerek.</p>	<p><i>Fizika:</i> Potenciál, munkavégzés, elektromos, illetve gravitációs erőtérben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség.</p>
<p>Néhány egyszeres és kétszeres improprius integrál. Néhány hatványsor (formális meghatározás integrálással). Hatványsorok szerepe a matematikában, fizikában, informatikában. Hogyan számolnak az egyszeres számológépek 12 jegy pontossággal?</p>	
<p><b>Kulcsfogalmak/ fogalmak</b></p>	<p>Alsó és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Felszín, térfogat, forgástest, csonkakúp, csonkakúp, gömb.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Rendszerezés összefoglalás	Órakeret 95 óra
<p><b>Előzetes tudás</b></p>	<p>A4 év matematika tananyaga.</p>	
<p><b>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</b></p>	<p>Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben. Felkészítés az emelt szintű érettségire: az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének továbbfejlesztése, alkalmazási lehetőségek megtalálása. Kapcsolatok keresése különböző témakörök között.</p>	
<p><b>Ismeretek/fejlesztési követelmények</b></p>		<p><b>Kapcsolódási pontok</b></p>
<p><i>Gondolkodási módszerek</i> <i>Halmazok, matematikai logika</i> Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz. Halmazok közötti műveletek. Végtelen halmazok elmélete; számosságok. Állítások, logikai értékük. Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Univerzális és egzisztenciális kvantor.</p>		<p><i>Filozófia:</i> gondolati rendszerek felépítése, fejlődése.</p>

<p><i>Kombinatorika, gráfok, algoritmusok</i>  Permutáció, variáció, kombináció.  Binomiális tétel. Pascal háromszög.  Elemi gráfelméleti ismeretek.  Euler-féle poliédertétel.  A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása.  Nevezetes sejtések.</p>	
<p><i>Algebra és számelmélet</i>  <i>M</i> <i>vele</i> <i>te</i> <i>kifejezésekkel</i>  Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok.  A hatványozás azonosságai.  A matematikai fogalmak fejlődése, permanencia-elv.  Gyökös kifejezések átalakításai.  Exponenciális és logaritmusos kifejezések átalakításai.  <i>Számelmélet</i>  Oszthatósági szabályok. Számolás maradékokkal.  Prímszámok.  Oszthatósági feladatok megoldása.  <i>Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenletrendszer</i>  Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenletrendszerek.  Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenletrendszerek.  Gyökös egyenletek, egyenletrendszerek.  Exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenletrendszerek.  Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek.  Polinomok algebraja.  Paraméteres egyenletek, egyenletrendszerek.</p>	<p><i>Fizika; kémia:</i>  számítási feladatok megoldása.</p>
<p><i>Függvények, sorozatok, az analízis elemei</i>  <i>Függvények</i>  A függvény fogalma.  Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolútérték, exponenciális, logaritmus-, trigonometrikus függvények.  Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint.  Függvénytranszformációk.  Valós folyamatok elemzése függvénytanilag modellek szerint.  <i>Sorozatok, sorok</i>  A sorozat fogalma.  Számítási, mértani sorozat.  Rekurzióval megadott egyéb sorozatok.  Sorozatok monotonitása, konvergenciája.  A végtelen mértani sor.  <i>Analízis</i>  Függvények korlátossága és monotonitása.</p>	<p><i>Informatika:</i>  számítógépes programok használata függvények ábrázolására, vizsgálatára.</p> <p><i>Fizika:</i> Az analízis alkalmazásai a fizikában. A matematika és a fizika kölcsönhatása az analízis módszereinek kialakulásában.</p>

<p>Függvény határértéke, folytonossága.  Differenciálhányados, derivált függvény.  Differenciálási szabályok.  L'Hospital-szabály.  Függvényvizsgálat differenciálás segítségével.  Széls érték-meghatározási módok.  A tanult függvények primitív függvényei.  Integrálási módszerek.  A határozott integrál.  Newton-Leibniz tétel.  A határozott integrál alkalmazásai.  Improprius integrál.</p>	
<p><i>Geometria</i>  <i>Geometriai alapfogalmak</i>  Tételek köcsönös helyzete, távolsága, szöge.  <i>Geometriai alakzatok, bizonyítások</i>  Nevezetes pontalmazok.  Síkdomok, testek, tulajdonságaik.  Elemi sík- és térgeometriai tételek.  <i>Geometriai transzformációk</i>  Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik.  Szerepük a bizonyításokban és a szerkesztésekben.  <i>Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria</i>  Vektor fogalma, m veletek a vektorok körében.  Matematikai fogalmak fejlődésének követése.  Vektorfelbontás, vektorok koordinátái.  Hegyszög szögfüggvényei. Szinusz- és koszinusztétel.  A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása.  Trigonometrikus azonosságok.  Az egyenes egyenletei, egyenletrendszer (síkban és térben).  A kör egyenletei.  A kúpszeletek definíciója, egyenleteik.  <i>Geometriai mértékek</i>  A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik.  A kétoldali közelítés módszere. A terület fogalma és kiszámítási módjai.  A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai.  Az integrálszámítás felhasználása alakzatok mértékének kiszámításához.</p>	<p><i>M vészetek:</i>  szimmetriák,  arany metszés.</p> <p><i>Informatika:</i>  számítógépes  geometriai programok  használata.</p>
<p><i>Valószínű ségszámítás, statisztika</i>  Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás.  Eseményalgebra és m veleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer.  A mateatika különböző területeinek összekapcsolása: Boole-algebra.  Grafikonok, táblázatok, diagrammok készítése és olvasása.  Valószínű ségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság.  A valószínű ség kiszámítási módjai.</p>	<p><i>Informatika:</i>  táblázatkezel ,  adatbázis-kezel  program használata.</p> <p><i>Fizika:</i> fizikai  jelenségek  valószínű ségi  modellje.</p>

<p>Feltételes valószínűség. Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján. Szerepük a mindennapi életben. A véletlen szabályszerűségei, a nagy számok törvénye. A közvéleménykutatás elemei.</p>	
<p><i>Motivációs témakörök</i> Néhány matematikatörténeti szemelvény. A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. Pl. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról. Matematikusokkal kapcsolatos történetek. Matematika alapú játékok. Elemző készség fejlesztése. Logikai feladványok, konstrukciós feladatok. Kreativitás fejlesztése. A matematika néhány filozófiai kérdése. A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői. Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma.</p>	<p><i>Informatika:</i> könyvtárhasználat, internethasználat.</p>

<p><b>A fejlesztés várt eredményei a 12. évfolyam végén</b></p>	<p><i>Függvények, az analízis elemei</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.</li> <li>– Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása</li> </ul> <p><i>Geometria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.</li> <li>– Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.</li> </ul>
---	---